

# Ασκήσεις Πραγματικής Ανάλυσης

Δευτέρα 28 Μαρτίου 2016

## 4<sup>ο</sup> Φυλλάδιο - Οριακά Σημεία

**Άσκηση 1.** (a) Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος,  $A \subseteq X$  και  $x \in X$ .

- (i) Το  $x$  είναι οριακό σημείο του  $A$  αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $A$  με  $a_n \rightarrow x$ .
  - (ii) Το  $x$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$  αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $A$  με  $a_n \rightarrow x$  και  $a_n \neq a_m$  για κάθε  $n \neq m$ .
- (β) Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$  άνω φραγμένο. Να δειχθεί ότι το  $\sup A$  αποτελεί οριακό σημείο του  $A$ . Αν επιπλέον  $\sup A \notin A$ , τότε αποτελεί σημείο συσσώρευσης του  $A$ .

**Άσκηση 2.** Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $A, B \subseteq X$ . Να δειχθεί ότι  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$  και να δοθεί παράδειγμα όπου ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

**Άσκηση 3.** Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος,  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  και θεωρούμε τις σφαίρες  $S(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$  και  $S[x, \varepsilon] = \{y \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$ . Ισχύει ότι  $\overline{S(x, \varepsilon)} = S[x, \varepsilon]$ ;

**Άσκηση 4.** (a) Έστω  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  και  $x \in \mathbb{R}$ . Να δειχθεί ότι  $\overline{x + A} = x + \overline{A}$  και  $\overline{A + B} \subseteq \overline{A} + \overline{B}$ .

- (β) Να δειχθεί ότι για τα σύνολα  $A = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  και  $B = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ , ο εγκλεισμός του προηγούμενου ερωτήματος είνα γνήσιος. (Υπόδειξη: Ισχύει ότι  $\overline{A} = A$ ,  $\overline{B} = B$ ,  $0 \notin A + B$ , όμως  $0 \in \overline{A + B}$ ).

**Άσκηση 5.** Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος.

- (a) Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο  $F = \{x_1, \dots, x_n\}$  του  $X$ , ισχύει ότι  $\overline{F} = F$ .
- (β) Έστω  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία στον  $X$  και  $x_0 \in X$ , τέτοια ώστε  $x_n \rightarrow x_0$ . Θέτουμε  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Να δειχθεί ότι  $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$ .

**Άσκηση 6.** Έστω  $(X, \rho), (Y, d)$  μετρικοί χώροι,  $A \subseteq X$  και  $f : X \rightarrow Y$  συνεχής και “1-1”.

- (a) Αν  $x \in X$  οημείο συσσώρευσης του  $A$ , τότε το  $f(x)$  αποτελεί σημείο συσσώρευσης του  $f(A)$ . Τι συμβαίνει αν η  $f$  δεν υποτεθεί “1-1”;
- (β) Αν  $a \in A$  μεμονωμένο σημείο του  $A$ , είναι απαραίτητα αληθές ότι το  $f(x)$  αποτελεί μεμονωμένο σημείο του  $f(A)$ ; Για αντιπαράδειγμα θεωρείστε τους  $X = (0, 1) \cup \{2\}$ ,  $Y = (0, 1]$  εφοδιασμένους με την ευκλείδεια μετρική και τη συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  με

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{av } x \in (0, 1), \\ 1, & \text{av } x = 2. \end{cases}$$

**Άσκηση 7.** Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $A \subseteq X$ . Ορίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου  $A$  να είναι η συνάρτηση  $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{av } x \in A, \\ 0, & \text{av } x \notin A. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι τα σημεία ασυνέχειας της  $\chi_A$  είναι το σύνολο  $\overline{A} \cap \overline{A^c}$ .